Das Konzept verborgener Variablen in der Quantenmechanik

Fabian Schubert

25. Juli 2014

Inhalt

- Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes
- EPR-Experiment und Bellsche Ungleichung
- Die Bohmsche Mechanik als Beispiel einer nichtlokalen Theorie verborgener Variablen

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

- A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, 1935:
  Can Quantum Mechanical Descripton of Physical Reality be Considered Complete?

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

- A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, 1935:
  Can Quantum Mechanical Descripton of Physical Reality be Considered Complete?
- Was ist eine vollständige Beschreibung der physikalischen Realität durch eine Theorie?

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

E,P,R geben 2 Bedingungen an:

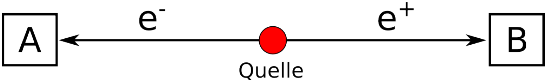
- **Vollständigkeit:** Eine physikalische Theorie ist vollständig, wenn jedes Element der physikalischen Realität ein Gegenstück in der Theorie besitzt.
- **Realitätskriterium:** Wenn ohne jede Störung des Systems der Wert einer Größe mit Bestimmtheit vorausgesagt werden kann, dann existiert ein Element der physikalischen Realität, das dieser Größe entspricht.

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

- In diesem Sinne wären z.B. Ort und Impuls also entweder nicht gleichzeitig Elemente der physikalischen Realität oder die QM ist keine vollständige Theorie.
- Denn: *Wären* Ort und Impuls real (hätten also einen definierten Wert) und wäre die QM gleichzeitig vollständig, müsste die Wellenfunktion diese Werte enthalten.

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

EPR-Experiment (Nach D. Bohm)



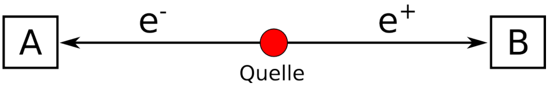
Quelle Produziert Elektron-Positron-Paare, die sich im Singlet-Spinzustand

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

befinden.

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

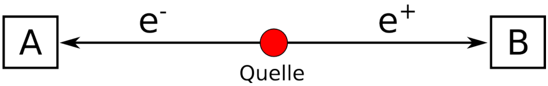
EPR-Experiment (Nach D. Bohm)



Es ist unerheblich in welche Richtung die Messung A den Spin des Elektrons misst, eine darauf folgende Messung in B in die selbe Richtung wird immer einen entgegengesetzten Spin messen. Weiterhin wird eine Messung in A, die den Spin in eine andere Richtung als B misst, dazu führen, dass der Ausgang des Experimentes in B nicht eindeutig feststeht.

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

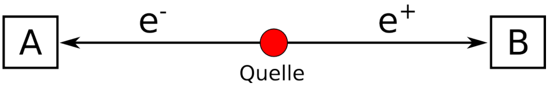
EPR-Experiment (Nach D. Bohm)



Argumentation: Da durch die Messung des Spins in A in z.B. z-Richtung (S_a^z) das Ergebnis der Messung von S_b^z mit Bestimmtheit vorausgesagt werden kann, existiert zu S_b^z nach dem **Realitätskriterium** ein entsprechendes Element der physikalischen Realität.

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

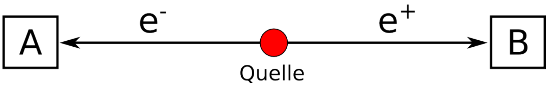
EPR-Experiment (Nach D. Bohm)



Argumentation: Da durch die Messung des Spins in A in z.B. z-Richtung (S_a^z) das Ergebnis der Messung von S_b^z mit Bestimmtheit vorausgesagt werden kann, existiert zu S_b^z nach dem **Realitätskriterium** ein entsprechendes Element der physikalischen Realität.
Man hätte aber auch durch Messung $S_a^{\mathbf{r}}$ einer beliebigen Richtung $\mathbf{r}$ in A die Entsprechende Größe in B als Element der physikalischen Realität konstituieren können.

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

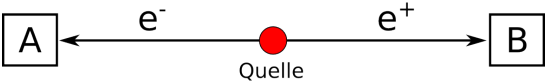
EPR-Experiment (Nach D. Bohm)



Um nun von einer vollständigen Theorie im Sinne von EPR zu sprechen, müssten also alle diese Elemente $S_b^{\mathbf{r}_i}$ der physikalischen Realität gleichzeitig ein Gegenstück in der Theorie besitzen. Die Spinkommutatorrelationen lassen dies aber nicht zu.

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

EPR-Experiment (Nach D. Bohm)



Um nun von einer vollständigen Theorie im Sinne von EPR zu sprechen, müssten also alle diese Elemente $S_b^{\mathbf{r}_i}$ der physikalischen Realität gleichzeitig ein Gegenstück in der Theorie besitzen. Die Spinkommutatorrelationen lassen dies aber nicht zu.

$\Rightarrow$ EPR: Die quantenmechanische Beschreibung ist *unvollständig*.

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

Mögliche Lösungen:

- Nichtlokalität: Es besteht (im Widerspruch zu den Prämissen des EPR-Experiments) eine Fernwirkung zwischen A und B, die im Moment der Messung in A auch den Zustand in B festlegt.

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

Mögliche Lösungen:

- Nichtlokalität: Es besteht (im Widerspruch zu den Prämissen des EPR-Experiments) eine Fernwirkung zwischen A und B, die im Moment der Messung in A auch den Zustand in B festlegt.
- "Verborgene Variablen": Die quantenmechanische Beschreibung ist tatsächlich unvollständig und es existieren zusätzliche "verborgene" Größen, die das Messergebnis von B von vornherein festlegen.

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

J. Bell, 1964:
Lokale Theorien verborgener Variablen führen zu Vorhersagen, die von experimentell überpüfbaren Vorhersagen der Quantenmechanik abweichen.

Konkreter gesagt verletzen die Vorhersagen der QM die Bellsche Ungleichung...

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

Bellsche Ungleichung

- Ausgangspunkt: Spinmessung in A und B, die räumlich soweit voneinander getrennt sind, dass man von keiner Wechselwirkung ausgehen kann.

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

Bellsche Ungleichung

- Ausgangspunkt: Spinmessung in A und B, die räumlich soweit voneinander getrennt sind, dass man von keiner Wechselwirkung ausgehen kann.
- Bezeichne λ die hypothetische verborgene Variable.

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

Bellsche Ungleichung

- Ausgangspunkt: Spinmessung in A und B, die räumlich soweit voneinander getrennt sind, dass man von keiner Wechselwirkung ausgehen kann.
- Bezeichne λ die hypothetische verborgene Variable.
- Eine Messung in Richtung **a** in A sei dann durch λ eindeutig festgelegt. Gleiches gilt für B in Richtung **b**:
  $A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1, \; B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1$

Bellsche Ungleichung

- Ausgangspunkt: Spinmessung in A und B, die räumlich soweit voneinander getrennt sind, dass man von keiner Wechselwirkung ausgehen kann.
- Bezeichne λ die hypothetische verborgene Variable.
- Eine Messung in Richtung **a** in A sei dann durch λ eindeutig festgelegt. Gleiches gilt für B in Richtung **b**:
  $A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1, \; B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1$
- Betrachte als Observable das Produkt Ergebnisse der Messungen in A und B, AB.

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

Bellsche Ungleichung

- Ausgangspunkt: Spinmessung in A und B, die räumlich soweit voneinander getrennt sind, dass man von keiner Wechselwirkung ausgehen kann.
- Bezeichne λ die hypothetische verborgene Variable.
- Eine Messung in Richtung $\mathbf{a}$ in A sei dann durch λ eindeutig festgelegt. Gleiches gilt für B in Richtung $\mathbf{b}$: $A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1$, $B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1$
- Betrachte als Observable das Produkt Ergebnisse der Messungen in A und B, AB.

Bellsche Ungleichung

$$\langle AB(\mathbf{a},\mathbf{b})\rangle = \int \rho(\lambda) A(\mathbf{a},\lambda) B(\mathbf{b},\lambda) d\lambda$$

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

Bellsche Ungleichung

$$\langle AB(\mathbf{a},\mathbf{b})\rangle = \int \rho(\lambda)A(\mathbf{a},\lambda)B(\mathbf{b},\lambda)d\lambda$$

Es muss bekanntlich gelten:

$$A(\mathbf{a},\lambda) = -B(\mathbf{a},\lambda)\ \forall\mathbf{a}$$

Außerdem:

$$A(\mathbf{a},\lambda)^2 = 1$$

Bellsche Ungleichung

Führe zusätzliche Richtung **c** ein:

$$\langle AB(\mathbf{a},\mathbf{b})\rangle - \langle AB(\mathbf{a},\mathbf{c})\rangle = \int \rho(\lambda)\left[A(\mathbf{a},\lambda)B(\mathbf{b},\lambda) - A(\mathbf{a},\lambda)B(\mathbf{c},\lambda)\right] d\lambda$$

$$= -\int \rho(\lambda)\left[A(\mathbf{a},\lambda)A(\mathbf{b},\lambda) - A(\mathbf{a},\lambda)A(\mathbf{c},\lambda)\right] d\lambda$$

$$= -\int \rho(\lambda)A(\mathbf{a},\lambda)A(\mathbf{b},\lambda)\left[1 - A(\mathbf{b},\lambda)A(\mathbf{c},\lambda)\right] d\lambda$$

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

Bellsche Ungleichung

Führe zusätzliche Richtung **c** ein:

$$\langle AB(\mathbf{a},\mathbf{b})\rangle - \langle AB(\mathbf{a},\mathbf{c})\rangle = \int \rho(\lambda)\left[A(\mathbf{a},\lambda)B(\mathbf{b},\lambda) - A(\mathbf{a},\lambda)B(\mathbf{c},\lambda)\right]d\lambda$$

$$= -\int \rho(\lambda)\left[A(\mathbf{a},\lambda)A(\mathbf{b},\lambda) - A(\mathbf{a},\lambda)A(\mathbf{c},\lambda)\right]d\lambda$$

$$= -\int \rho(\lambda)A(\mathbf{a},\lambda)A(\mathbf{b},\lambda)\left[1 - A(\mathbf{b},\lambda)A(\mathbf{c},\lambda)\right]d\lambda$$

da $|A|, |B| \leq 1$ und $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$:

$$\Rightarrow |\langle AB(\mathbf{a},\mathbf{b})\rangle - \langle AB(\mathbf{a},\mathbf{c})\rangle| \leq 1 + \langle AB(\mathbf{b},\mathbf{c})\rangle$$

Grundlegende Überlegung / Motivation des Konzeptes

Bellsche Ungleichung

Aus der Betrachtung der quantenmechanischen Erwartungswerte gilt, normiert auf ± 1 $A(\theta_{a,b}) = -cos(\theta_{a,b})$ wenn $\theta_{a,b}$ den Winkel zwischen den Messrichtungen **a** und **b** bezeichnet.

Bellsche Ungleichung

Aus der Betrachtung der quantenmechanischen Erwartungswerte gilt, normiert auf ± 1 $A(\theta_{a,b}) = -cos(\theta_{a,b})$ wenn $\theta_{a,b}$ den Winkel zwischen den Messrichtungen **a** und **b** bezeichnet.
Betrachtet man nun z.B. den konstruierten Fall dass **a**,**b** und **c** in einer Ebene liegen, mit $\theta_{a,b} = 90°$,$\theta_{a,c} = \theta_{c,b} = 45°$ und setzt die entsprechenden Werte in die Bellsche Ungleichung ein, ergibt sich

$$|-cos(90°) + cos(45°)| \leq 1 - cos(45°)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq 1 - \sqrt{2}$$
$$\sqrt{2} \leq 1$$

was also für diesen Fall die Bellsche Ungleichung verletzt.

Die Bohmsche Mechanik als Beispiel einer nichtlokalen Theorie verborgener Variablen

- Aus den vorangegangenen Überlegungen ist hervorgegangen, dass eine Theorie verborgener Variablen nichtlokal sein muss.
- Eine solche Theorie liefert die Bohmsche Mechanik

Die Bohmsche Mechanik als Beispiel einer nichtlokalen Theorie verborgener Variablen

- Auganspunkt ist auch hier die Schrödingergleichung:

$$\imath\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\mathbf{r})\psi \quad (1)$$

- Zusätzlich wird die sogenannte "guiding equationëingeführt, die die Zeitentwicklung jedes Teilchenortes eindeutig festlegt und mit der Wellenfunktion verknüpft:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{\hbar}{m} Im(\frac{\nabla\psi}{\psi}) \quad (2)$$

Die Bohmsche Mechanik als Beispiel einer nichtlokalen Theorie verborgener Variablen

- Schreibt man die Wellenfunktion in der Form $\psi(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r}, t)e^{iS(\mathbf{r},t)/\hbar}$, so kann man (2) ausdrücken als:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{\nabla S(\mathbf{r}, t)}{m}\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{Q}} \qquad (3)$$

- D.h. die Teilchenbewegung wird durch die Phase der Wellenfunktion bestimmt.

Motivation von Gleichung (2)

- Setzt man den bereits erwähnten Ansatz $\psi(\mathbf{r},t) = R(\mathbf{r},t)e^{iS(\mathbf{r},t)/\hbar}$ in die Schrödingergleichung ein, so kann man die zeitliche Entwicklung von R und S ausdrücken als

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m}[R\nabla^2 S + 2(\nabla R)(\nabla S)] \tag{4}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left[\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}\right] \tag{5}$$

Die Bohmsche Mechanik als Beispiel einer nichtlokalen Theorie verborgener Variablen

Motivation von Gleichung (2)

- Im klassischen Grenzfall kann in der Zeitenwicklung von S der Term $\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}$ vernachlässigt werden und es ergibt sich

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\mathbf{r}) = 0 \tag{6}$$

- Dies hat die Form der Hamilton-Jacobi-Gleichung, in der S als Wirkung bezeichnet wird.

Motivation von Gleichung (2)

- Im klassischen Grenzfall kann in der Zeitenwicklung von S der Term $\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}$ vernachlässigt werden und es ergibt sich

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\mathbf{r}) = 0 \tag{6}$$

- Dies hat die Form der Hamilton-Jacobi-Gleichung, in der S als Wirkung bezeichnet wird.
- Für die Geschwindigkeit eines Teilchens gilt hier $\mathbf{v} = \frac{\nabla S}{m}$, was für $\mathbf{Q}$ genau Gleichung (3) entspricht.

Motivation von Gleichung (2)

- Im klassischen Grenzfall kann in der Zeitenwicklung von S der Term $\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}$ vernachlässigt werden und es ergibt sich

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\mathbf{r}) = 0 \tag{6}$$

- Dies hat die Form der Hamilton-Jacobi-Gleichung, in der S als Wirkung bezeichnet wird.
- Für die Geschwindigkeit eines Teilchens gilt hier $\mathbf{v} = \frac{\nabla S}{m}$, was für $\mathbf{Q}$ genau Gleichung (3) entspricht.
- Die Bohmsche Mechanik deutet also die Beziehung $\mathbf{v} = \frac{\nabla S}{m}$ auch ohne den klassischen Limes als zeitlichen Verlauf von Teilchenbahnen.

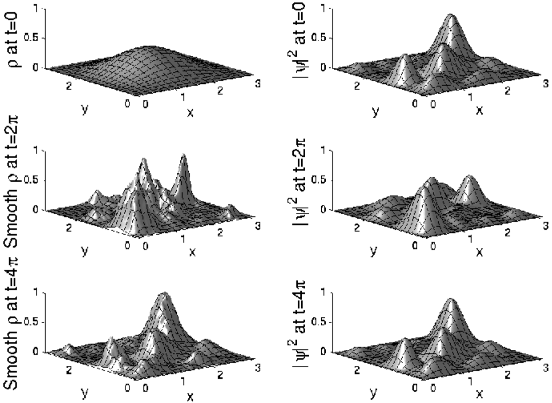
Die Bohmsche Mechanik als Beispiel einer nichtlokalen Theorie verborgener Variablen

Die Quantengleichgewichtshypothese

- Die Zeitentwicklung der Teilchen erfordert räumliche Anfangsbedingungen.
- Die Quantengleichgewichtshypothese macht die Annahme, dass Teilchen im Mittel eine $|\psi|^2$-Verteilung als Anfangsbedingung besitzen.
- Die Teilchenstatistik ist dann für alle Zeiten $|\psi(t)|^2$-verteilt.

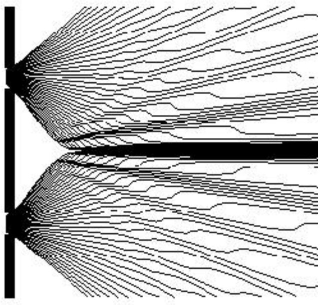
Die Quantengleichgewichtshypothese

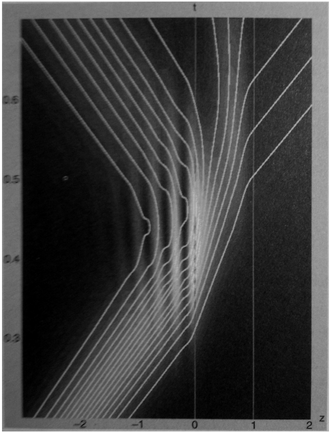
- Ist die Hypothese sinnvoll?
  A. Valentini et al., 2004:



Die Bohmsche Mechanik als Beispiel einer nichtlokalen Theorie verborgener Variablen

Konkrete Anwendungen (Taken from O. Passon: *Bohmsche Mechanik*)





Konkrete Anwendungen

Zum Schluss: Simulation der Teilchenbewegung im eindimensionalen unendlichen Potentialtopf.

Ich danke für die Aufmerksamkeit!

Quellen

- O. Passon: *Bohmsche Mechanik: Eine elementare Einführung in die deterministische Interpretation der Quantenmechanik*; Verlag Harri Deutsch, 2010
- A. Valentini et al.: *Dynamical Origin of Quantum Properties*; March 2004