

Johann-Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Festkörpertheorie I WS 2011/2012
Goldstone-Moden

Simon Streib

18.01.2012

Phasenübergänge

Sei als Beispiel folgender Fall gegeben:

- Geordnete Phase: E_1, S_1
- Ungeordnete Phase: E_2, S_2
- $E_1 < E_2$ und $S_1 < S_2$

Thermodynamisches Gleichgewicht bei konstantem Volumen:

$$F = E - TS = \text{minimal}$$

Klassischer Phasenübergang bei T_c , falls

$$E_1 - T_c S_1 = E_2 - T_c S_2$$

Ordnungsparameter

Phasenübergänge können oft durch einen Ordnungsparameter beschrieben werden, der in der ungeordneten Phase Null ist und in der geordneten Phase ungleich Null:

- Flüssig-Gas-Phasenübergang: Dichte-Differenz $\rho_{fl} - \rho_{gas}$
- Ferromagnetischer Phasenübergang: Magnetisierung $\mathbf{m}_i = \langle \mathbf{S}_i \rangle$
- Superfluider Phasenübergang: Kondensat-Amplitude $\Phi(\mathbf{x}) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{x}) \rangle$

Klassifikation von Phasenübergängen:

- 1. Ordnung, falls der Ordnungsparameter diskontinuierlich ist
- 2. Ordnung, falls der Ordnungsparameter kontinuierlich ist

Spontane Symmetriebrechung

- Symmetrie: Hamiltonian H ist invariant unter einer Gruppe \mathcal{G} von Transformationen seiner Freiheitsgrade

$$\forall g \in \mathcal{G}, \forall q_i : H(gq_i) = H(q_i)$$

$$[H, g] = 0$$

- Kontinuierliche Symmetrie: Die Elemente g der Symmetriegruppe \mathcal{G} kann durch eine kontinuierliche Variable θ parametrisiert werden: $g = g(\theta)$
- Gebrochene Symmetrie: Der Grundzustand $|\Psi_{gs}\rangle$ weist spontane Symmetriebrechung auf, wenn er nur invariant unter einer Untergruppe $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ ist und nicht die volle Symmetrie des Hamiltonians hat.

Entartung des Grundzustands

Konsequenz der Symmetriebrechung: Der Grundzustand ist entartet:

$$Hg |\Psi_{gs}\rangle = gH |\Psi_{gs}\rangle = E_{gs}g |\Psi_{gs}\rangle, \quad g \notin \mathcal{G}', \quad g \in \mathcal{G}$$

Durch Anwendung von g können die Grundzustände ineinander transformiert werden. Im Falle einer kontinuierlichen Symmetrie gibt es unendlich viele Grundzustände und der Grundzustand kann durch eine Variable θ parametrisiert werden:

$$|\Psi_{gs}(\theta)\rangle = g(\theta) |\tilde{\Psi}_{gs}\rangle$$

Dabei ist $|\tilde{\Psi}_{gs}\rangle$ ein willkürlich gewählter Referenzgrundzustand.

Goldstone-Theorem

Ist eine kontinuierliche Symmetrie spontan gebrochen, dann treten Moden ohne Anregungslücke auf, die als Goldstone-Moden bezeichnet werden. Die mit diesen Moden assoziierten Quasiteilchen sind Bosonen (Goldstone-Bosonen).

- Nur gültig für kurzreichweitige Wechselwirkungen
- Zahl der Goldstone-Moden: $p = r - s$

r : Anzahl der Generatoren der Symmetriegruppe \mathcal{G}

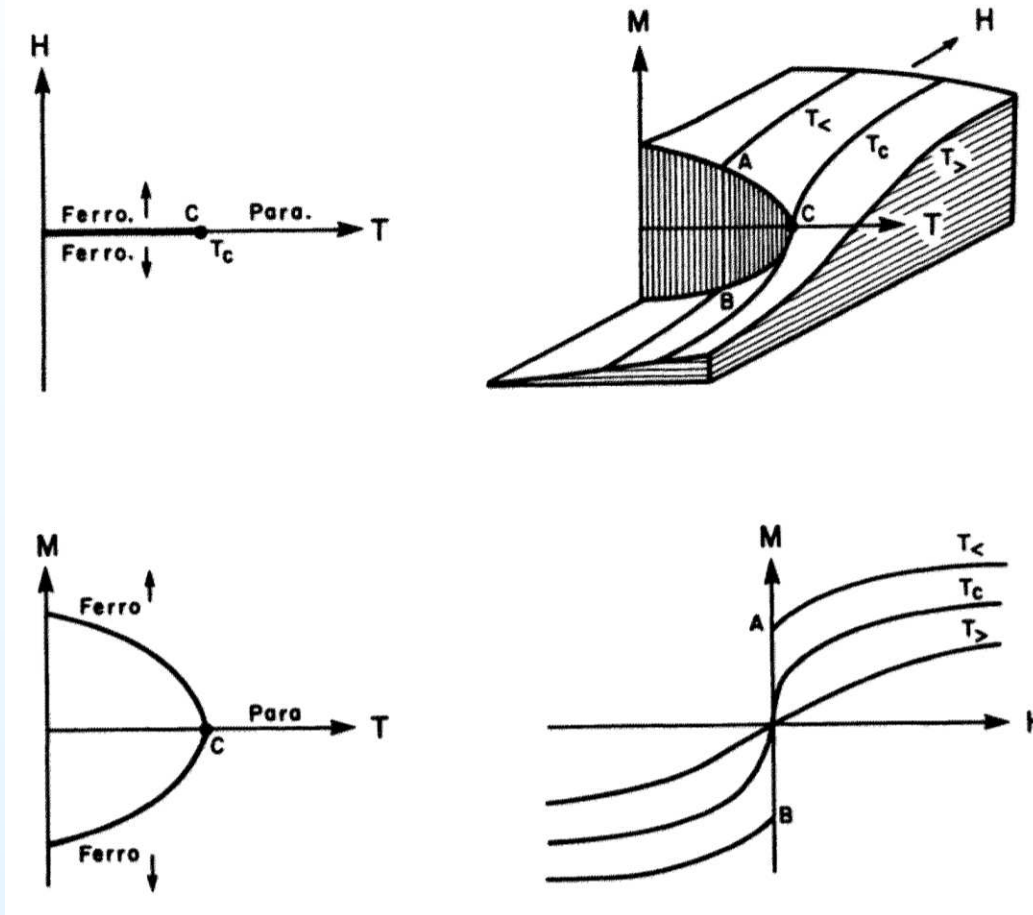
s : Anzahl der Generatoren der Symmetriegruppe \mathcal{G}'

Erinnerung: Eine Symmetrieoperation g einer Gruppe \mathcal{G} kann geschrieben werden als

$$g = e^{\sum_A \theta^A T^A}$$

T^A : Generatoren von \mathcal{G} , bilden eine Lie-Algebra

Phasendiagramme für einen Ferromagneten



Quelle: Negele/Orland

Das $O(n)$ symmetrische Spinmodell

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \sum_i \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{S}_i$$

$$\mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} S_i^1 \\ \vdots \\ S_i^n \end{pmatrix} : n\text{-komponentiger Spin, } J_{ij} = \begin{cases} J & \text{für n.n. } i \text{ und } j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathbf{h}_i = 0 \forall i$: H invariant unter globaler Rotation R aller Spins:

$$(\mathbf{R}\mathbf{S}_i)^T (\mathbf{R}\mathbf{S}_j) = \mathbf{S}_i^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{S}_j = \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$

- $n=1$: Ising-Modell
- $n=2$: XY-Modell
- $n=3$: Heisenberg-Modell

Symmetriebrechung

Grundzustand: $\mathbf{h}_i = \mathbf{h}$: Alle Spins parallel zu \mathbf{h} ausgerichtet

$$\mathbf{h} = 0: \mathbf{M} = \sum_i \langle \mathbf{S}_i \rangle = \sum_i \langle -\mathbf{S}_i \rangle = 0 ?$$

Thermodynamischer Limes: Reihenfolge der Limites wichtig:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \mathbf{S}_i \rangle = \mathbf{m} \neq 0$$

Denn für $N \rightarrow \infty$ divergiert für jedes noch so kleine h die Energie, wenn alle Spins gegen das Magnetfeld rotiert werden. Dadurch erhält man für $h \rightarrow 0$ einen symmetriegebrochenen Grundzustand.

Beispiel Ising-Modell mit h in “up”-Richtung:

$$\frac{P_{down}}{P_{up}} = e^{-2N\beta mh} = \begin{cases} 0 & , N \rightarrow \infty \\ 1 & , h \rightarrow 0 \end{cases}$$

Landau-Theorie

Landau-Funktion: $\mathcal{L}(\mathbf{m}, h, T)$ mit Ordnungsparameter $\mathbf{m} = \frac{1}{N} \langle \sum_i \mathbf{S}_i \rangle$

$$\mathcal{L}(\mathbf{m}, h, T) = c_1 h m + d_2 t m^2 + c_3 h m^3 + b_4 m^4$$

$$t = T - T_c, \quad d_2 > 0, \quad b_4 > 0$$

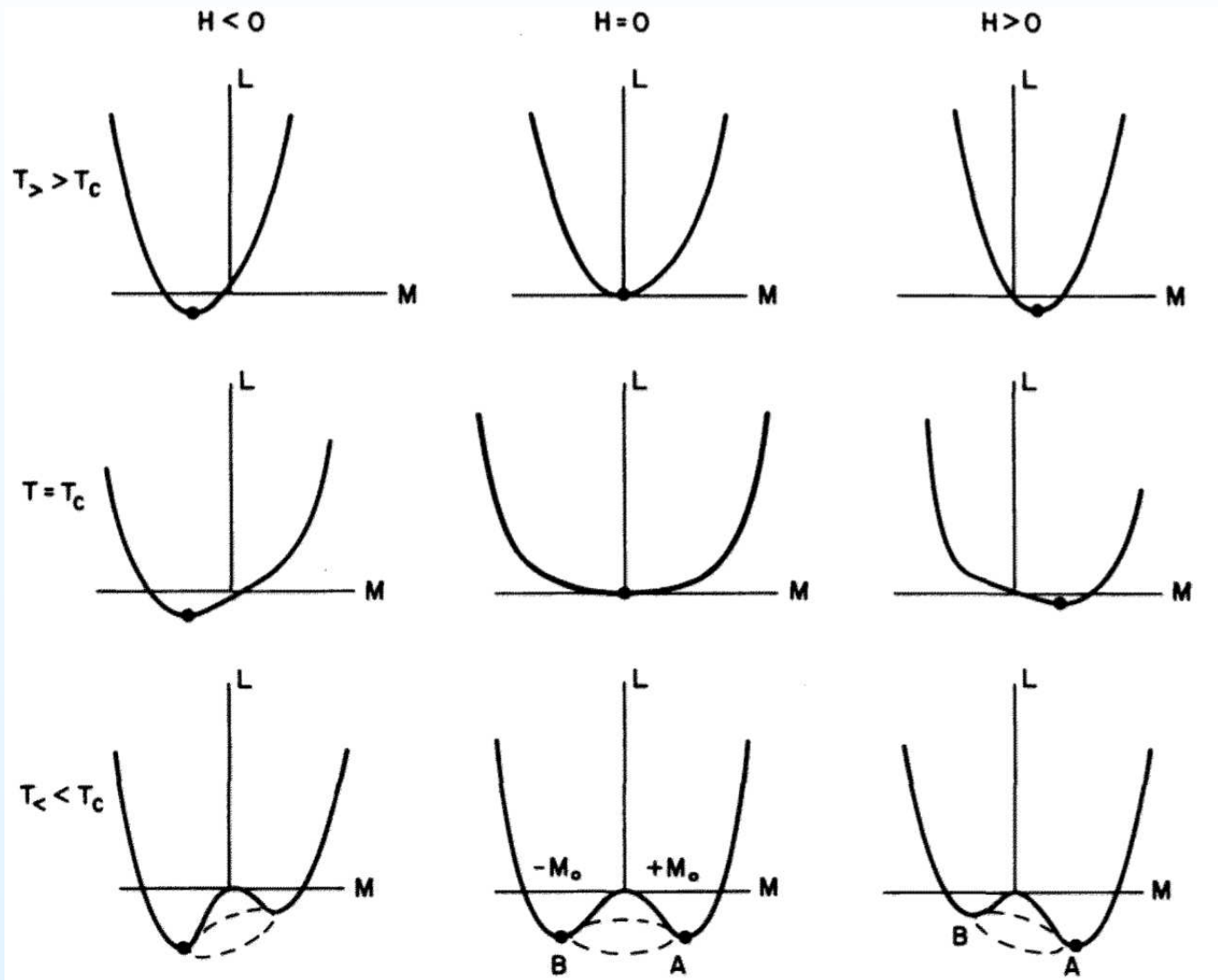
Herleitung durch Symmetrieargumente oder Meanfield-Theorie:

$$Z = \text{tr} e^{-\beta H} = e^{-\beta N f}$$

$$Z_{MF} = e^{-\beta N f_{MF}(\mathbf{m}, h, T)}$$

Identifizierung: $f_{MF} = \mathcal{L}$

Zustand des Systems definiert durch $\frac{\partial f_{MF}}{\partial m} = 0$.

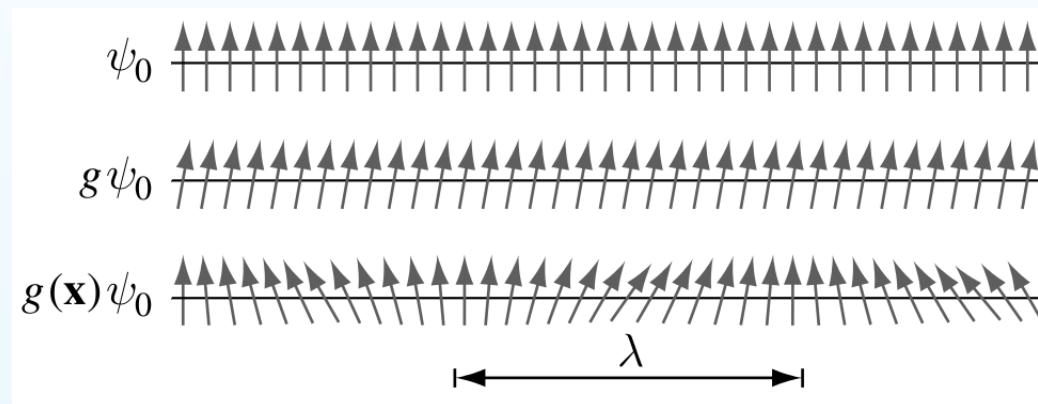


Quelle: Negele/Orland

Qualitative Beschreibung der Goldstone-Moden

Ist Ψ_0 ein Grundzustand, dann ist $g\Psi_0$ auch ein Grundzustand.

$g(\mathbf{x})$ transformiere Ψ_0 ortsabhängig, wobei die Ortsabhängigkeit kontinuierlich und periodisch mit Wellenlänge λ sei (Spinwelle):



Quelle: Altland/Simons

Für $\lambda \rightarrow \infty$ bzw. $k \rightarrow 0$: Anregungsenergie $\epsilon(k \rightarrow 0) = 0$.

Anzahl dieser Moden: Zahl unabhängiger Symmetrietransformation $g \in \mathcal{G}$ des Hamiltonians, die einen Grundzustand nicht invariant lassen.

Quanten-Heisenberg-Modell

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j, \text{ mit } [\hat{S}_i^k, \hat{S}_j^l] = \delta_{ij} \epsilon_{klm} \hat{S}_i^m$$

Holstein-Primakoff-Transformation:

$$\hat{S}_i^+ = \hat{a}_i^\dagger \sqrt{2S - \hat{n}_i}, \hat{S}_i^- = \sqrt{2S - \hat{n}_i} \hat{a}_i, \hat{S}_i^z = \hat{n}_i - S$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

Für kleine Fluktuationen um den klassischen Grundzustand kann man nähern:

$$\hat{S}_i^+ \approx \hat{a}_i^\dagger \sqrt{2S}, \hat{S}_i^- \approx \sqrt{2S} \hat{a}_i$$

$$H \approx E_0 + \frac{JS}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i \right)$$

Diagonalisierung via Fourier-Transformation $\hat{a}_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \hat{a}_{\mathbf{k}}$:

$$H = E_0 + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \hat{n}_{\mathbf{k}}$$

$$\hbar\omega_{\mathbf{k}} = zJS(1 - \gamma_{\mathbf{k}}), \quad \gamma_{\mathbf{k}} = \frac{1}{z} \sum_{j, n.n.} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_j)$$

Für ein d-dim. hyperkubisches Gitter ($z = 2d$) erhält man für kleine \mathbf{k} :

$$\hbar\omega_{\mathbf{k}} \approx \frac{1}{2} J S a^2 \mathbf{k}^2 + \mathcal{O}(\mathbf{k}^4)$$

Aufgrund periodischer Randbedingungen gilt:

$$e^{ik_r L_r} = 1 \Rightarrow k_r = \frac{2\pi n}{L_r}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad r = 1 \dots d$$

Es gibt im thermodynamischen Limes ($V = L^d \rightarrow \infty$) keine Anregungslücke.

Spinwellen

Bei den Quasiteilchen handelt es sich um Spinwellen (Magnonen). Diese sind die Goldstone-Moden der symmetriegebrochenen ferromagnetischen Phase. Quasi-klassische Anregungen sind durch kohärente Zustände gegeben:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} |c\rangle = c_{\mathbf{k}} |c\rangle$$

$$\hat{n}_i = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_i} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$$

$$\begin{aligned} \langle c | \hat{n}_i | c \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_i} c_{\mathbf{k}'}^* c_{\mathbf{k}} \\ &= \frac{1}{N} \left| \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} c_{\mathbf{k}} \right|^2 \end{aligned}$$

Literatur

- J. W. Negele, H. Orland: Quantum Many-Particle Systems
- A. Altland, B. Simons: Condensed Matter Field Theory
- L. Bartosch: Skript zur Vorlesung “Statistische Physik und kritische Phänomene”, WS 2011/2012
- W. Hofstetter: Skript zur Vorlesung “Ultrakalte Quantengase”, SS 2011